Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 17 — 13. Dezember 2022

Aufgabe 1: *(1+2 Punkte)*

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, deren zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere.

Zeige die Konvergenz

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit

$$|a_n - a_{n-1}| \leq 2^{-n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{K}$ konvergiert.

Aufgabe 2: *(1+1+4 Punkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} \qquad \text{für alle } n > N$$

für ein $\alpha > 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Folge $(na_n)_{n>N}$ ist monoton fallend.

(b) Die Folge $(na_n)_{n>N}$ konvergiert.

(c) Die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Hinweis: Aufgabenteil (b) und Cauchy-Konvergenzkriterium.

Aufgabe 3: *(1 Punkt)* Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$$

divergiert.

Ausgabedatum: 13. Dezember 2022 **Abgabetermin:** 19. Dezember 2022, 10:00 Uhr.